四庫全書

子部

欽定四庫全書

子部

歷算全書卷七

詳校官欽天監天文生臣賈德輔

靈臺郎臣倪廷梅覆勘

總校官編修臣王燕緒

校對官五官靈臺郎臣陳際新

謄録監生臣官成

繪圖監生臣劉秉仁

序

歷家所憑全恃測驗昔者蔡邕上書願匍匐渾儀之下按度考數著於篇章以成一代盛典古人之用心葢可想見然則儒者端居斗室足不履觀臺目不睹渾象安所得測驗之事而親之而安從學之曰所恃者有測驗之法之理在則句股是也遭秦之厄天官書器散亡漢落下閎鮮于妄人等追尋墜緒歷代相承攷訂加詳至于今日厥理大著則句股之用于渾圓是也今夫測量

之法方易而圓難古用徑一圍三聊舉成數非有所不知也自劉徽祖沖之各為圓率逮元趙友欽定為徑一則圍三一四一五九二與今西術略同皆割圓以得之非句股奚藉焉西法割圓比例以直角三邊形為主即句股也但異其名不異其實然用句股測平圓猶易用句股測渾圓更難歷家所測皆渾圓也非平圓也古有黃赤道相準之率大約於渾器比量僅得梗槩未能彰諸筭術近代諸家以相減相乘推變其差損益有序稍為近之而未親也惟元郭太史守

敬始以弧矢命筭有平視側視諸圖推步立成諸數黄赤相求斯有定率視古為密由今觀之皆句股也但其立法必先求矢又用三乘方取數不易故但能列其一象限中度率不復能求其細分之數歷書之法則先求角既因弧以知角復因角以知弧而句股之形能預定其比例又佐之八線互用以通其窮其法以三弧度相交輒成三角則此三弧度者各有其相應之弦弧與弧相割即弦與弦相遇而句股生焉茍熟其法則正反斜

側八線犁然各相得而成句股八線比例以半徑全數為弦正弦餘弦為句為股又以割線為弦切線與半徑全數為其句股表中所列句股形凡五千四百於是乎黃可變赤赤可變黃可以經度知緯可以緯度知經經羅絡鉤連旁通曲暢分秒忽微臚陳夆位求諸中心可無纖芥之疑告諸同學亦如指掌之晰即不必匍匐渾儀之下可以不窺牖而見天道賴有此具也全部歷書皆弧三角之理即皆句股之理顧未嘗正言其為句股使人望洋無際彼云直角三邊形此云句股乃西國方言譯書時不知此理遂生分別又譯書者識

有偏全筆有工拙語有淺深詳略所載圖說不無滲漏之端影似之談與臆參之見學者病之玆稍為摘其肯棨從而疏剔訂補以直截發明其所以然竊為一言以蔽之曰析渾圓尋句股而已蓋于是而知古聖人立法之精雖弧三角之巧豈能出句股範圍然句股之用亦必至是而庶無餘蘊爾歷法之深微奥衍不啻五花八門其章句之詰曲離奇不啻羊腸絙度而由是以啓其扃鑰庶將掉臂游行若揭日月而騁康莊矣文雖不多

實為此道中開闢塗徑蓋積數十年之探索而後能會通簡易故亟欲與同志者共之余老矣禹服九州之大歷代聖人教澤所漸被必有好學深思其人所冀大為闡發俾古人之意晦而復昭一綫之傳引而弗替則生平之志願畢矣豈必身擅其名然後為得哉余拭目竢之康熙二十三年上元甲子長至之吉勿菴梅文鼎書於柏梘山中

欽定四庫全書

曆算全書卷七

宣城梅文鼎撰

弧三角舉要卷一

弧三角體勢

弧三角與平異理故先體勢知體勢然後可以用算而算莫先於正弧猶平三角之有句股形也故以為弧度之宗正弧形之角取法于黄赤交角則有定度而餘

角取法于過極圈交黃道之角則隨度而移互用之其理益顯故有求餘角法弧三角以一角對一邊而比例等與平三角同而其理迥別故有弧角比例法斜弧無相對之弧角則比例之法窮故有垂弧法三角求邊則垂弧之法又窮故有次形法垂弧與次形合用則有捷法弧與角各有八綫而可以互視故有相當法餘詳環中黍尺

及塹堵測量

弧度與天相應

弧三角之法以測渾員渾員之大者莫如天員之至者亦莫如天故弧三角之度皆天度也

以平測員其難百倍以員測員其簡百倍而得數且真是故測天者必以弧度而論弧度者必以天為法

測弧度必以大圈

渾球上弧度有極大之圈乃腰圍之一綫也如赤道帶天之紘原止一綫如黄道如子午規如地平規盡然又如測得兩星相距之遠近亦為大圈之分若以此兩星之距弧

引而長之必匝於渾員之體而成大圈不論從衡斜側皆同一法

球上大圈必相等

所以必用大圈者以其相等也　渾球上從衡斜側皆可為大圈而其大必相等者以俱在腰圍之一綫也如黄道赤道及子午規地平規俱係大圈必皆相等不相等即非大圈故惟大圈可相為比例　任測兩星之距不必當黄赤道而能與二道相比例者以其皆大圈也

球上兩大圈無平行者

大圈在渾球既為腰圍之一綫則必無兩圈平行之法

若平行即非大圈如黄赤道並止一綫而無廣即無地可容平行綫也子午規地平規亦然

球上圈能與大圈平行者皆小圈謂之距等圈

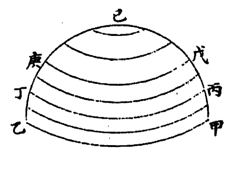
離大圈左右作平行圈皆曰距等圈謂其四圍與大圈相距皆等如于黄道內外作緯圈其與黄道相距或近則四面皆近或遠則四面亦皆遠無毫忽之不同平行故也赤道緯圈地平高度並同而其自相距亦等故曰距等也如黄道內外或近或遠處處可作距等圈而皆與黄道平行即其圈亦自相平行故並為等距距等圈皆小于大圈如黄道內外緯圈但離數分其圍即小于黄道其距益遠其圈益小小之極至一點而止

諸緯圈並然不能與大圈為比例大圈惟一距等圈無數無一同者無法可為比例故為比例者必大圈也

距等圈正視圖

乙 丁 庚 己 戊 丙 甲

距等圈旁視圖



如圖甲乙為大圈大圈只一丙丁及戊庚等皆小圈小圈無數漸近圓頂己即其圈愈小而成一點大小懸殊故不可以相為比例

大圈之比例以度不拘丈尺

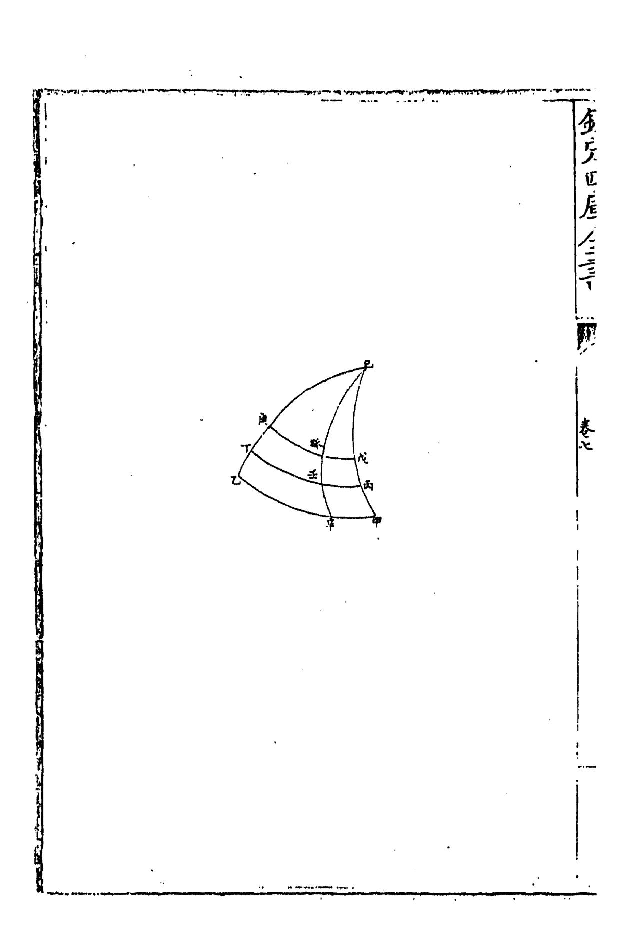
凡圈皆可分三百六十度（每圈平分之成半周四平分之成象限象限又各平分之為九十度成三百六十度）而球大者其大圈大球小者其大圈小皆以本球之圜徑自為比例不拘丈尺（儘本球之圜分為全周之度其球上之度即皆以此為準但在本球上為最大故謂之大圈非以丈尺言其大小）古人以八尺渾

儀準周天蓋以此也又如古渾儀原有三重其在內之環周必小于外而其度皆能相應者在內環周雖小而在內之渾員以此為大圈即在內之各度並以此為準故也

大圈之度為公度

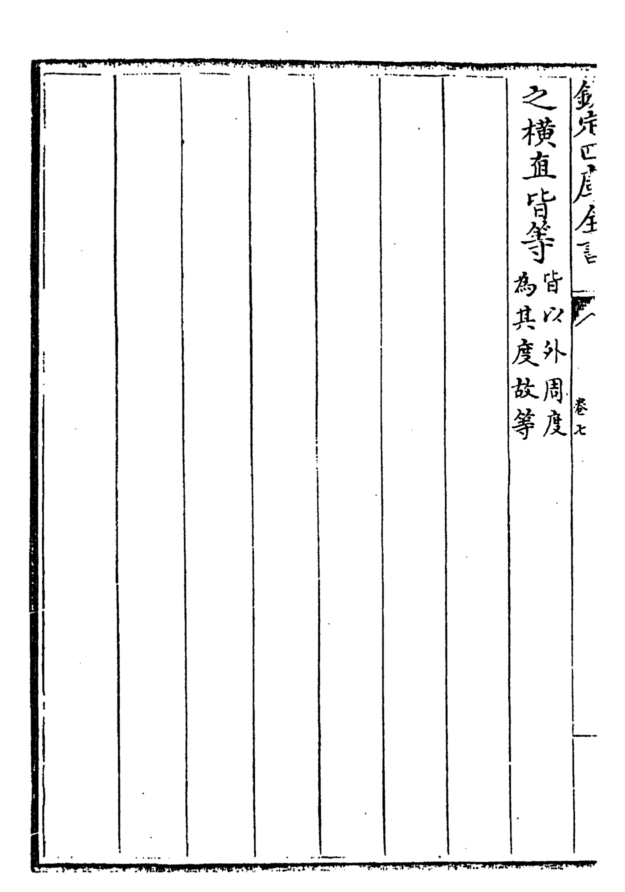
凡球上距等圈亦可平公三百六十度而其圈皆小于本球之大圈又大小不倫則其所分之細度亦皆小于大圈而大小不倫矣惟本球腰圍大圈上所分之度得

為公度故凡言度者必大圈也


己
庚
癸
戊
丁
壬
丙
乙
辛
甲

如圖甲乙為大圈一象限丙丁及戊庚各為距等小圈一象限象限雖同而大小逈異又如甲辛為大圈三十度丙壬及戊癸亦各為小圈之三十度其為三十度雖同而大小亦異再細攷之至一度或至一分亦大小異也故惟大圈之度為公度

大圈即本球外周其度即外周之度而横直皆相等平員有徑有周渾員亦有徑有周立渾員于前則外周可見即腰圍之大圈也旋而視之皆可為外周故大圈



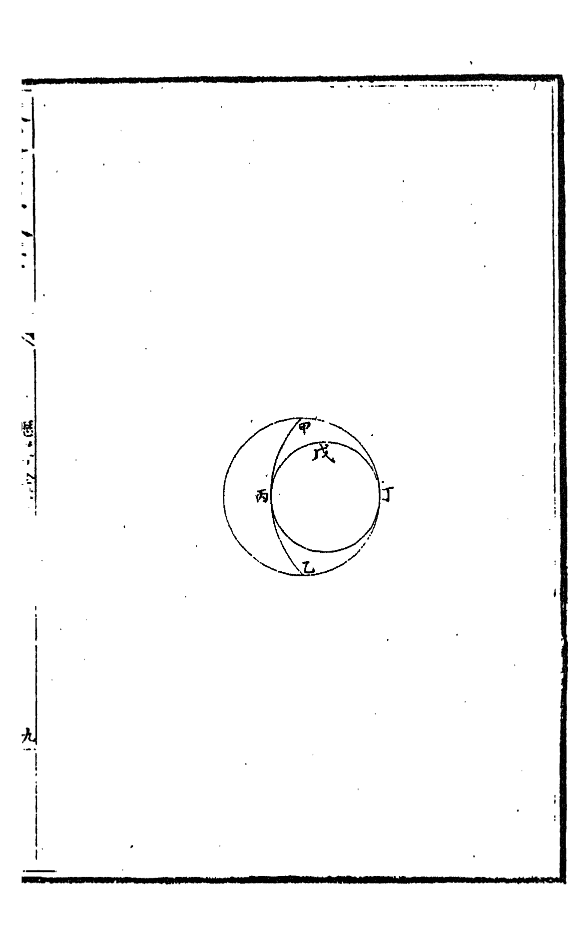
之横直皆等皆以外周度為其度故等

天頂
北極
赤道
地平

如圖子午規為渾儀外周其度三百六十乃横度也地平為腰圍度亦三百六十乃横度也横度直度皆得為外周故其度相等若依北極論之則赤道又為腰圍而亦即外周也推是言之渾球上大圈從衡斜側皆相等何則旋而視之皆得為腰圍即皆得為外周故也

大圈上相遇有相割無相切大圈相割各成兩半分

球上從衡斜側既皆成大圈則能相割矣而皆為渾員之外周則必無相切之理若相切者必在外周之内為距等小圈


甲
戊
丙
丁
乙

如圖甲丙乙為大圈半周能割大圈于甲于乙而不能相切丙丁戊小圈則能切大圈于丙于丁

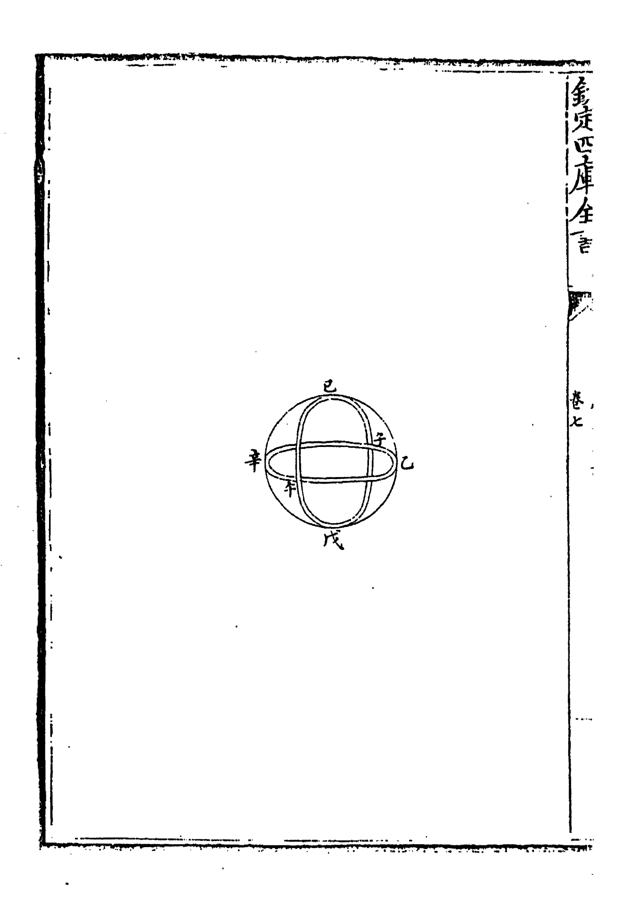
甲
庚
子 癸 壬 己
辛
乙

如圖甲庚辛乙為大圈半周割外圈于甲于乙則甲已乙乙子甲亦各成半周若壬癸距等圈割大圈于庚于辛而庚辛非半周

球上兩大圈相割必有二處此二處必相距一百八十度而各成兩平分如黄赤二道相交於春分必復相交於秋分即二分之距必皆半周一百八十度而黄道成兩半分赤道亦兩平分也若距等圈與大圈相割必不能成兩平方

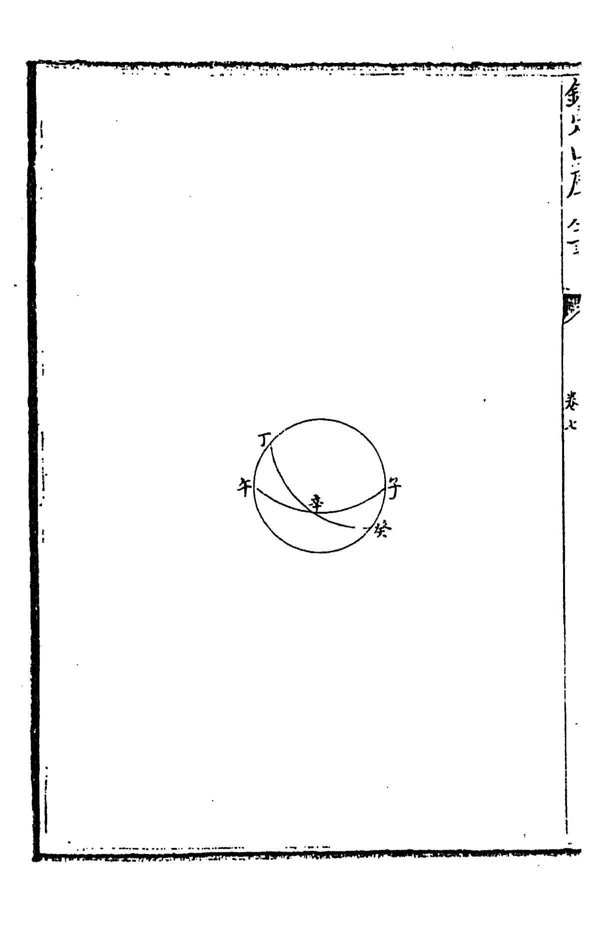
兩大圈相遇則成角

球上大圈既不平行則其相遇必相交相割而成角弧三角之法所由以立也角有正有斜斜角又有鋭鈍共三種而角兩旁皆弧綫與直綫角異



己
子
辛
乙
午
戊

如圖己午戊子為子午規辛午乙子為地平規兩大圈正相交于南地平之午北地平之子則皆正角而四角皆等並九十度角也正角一名直角一名十字角一名正方角


丁
午
子
辛
癸

如圖午辛子為地平規丁辛癸為赤道規兩大圈斜相交于辛則丁辛午鈍角大于九十度丁辛午鋭角小于九十度兩角相並一百八十度減鋭角其外角必鈍若減鈍角亦得鋭角也故有內角即知外角　又兩鋭角相對兩鈍角相對其度分必等故有此角即知對角

凡此數端並與平三角同然而實有不同者以角兩旁之為弧綫也

弧綫之作角必兩

直綫剖平員作角形如分餅角旁兩綫皆半徑至周而止弧綫剖渾圜作角形如剖瓜角旁兩弧綫皆半周必復相交作角而等如黄赤道交于二分其角相等

角有大小量之以對角之弧其角旁兩弧必皆九十度弧綫角既如瓜瓣則其相距必兩端狹而中濶其最濶處必離角九十度此處離兩角各均即球上腰圍大圈也故其度即為角度如黄赤道之二分交角二十三度半即二至時距度此時黄赤道離二分各九十度乃腰圍最濶處也

大圈有極

大圈能分渾員之面羃為兩則各有最中之處而相對是為兩極兩極距大圈四面各九十度

巳

乙 丙 庚 辛 戊 丁 甲

壬

如圖甲辛乙爲赤道大圈巳爲北極巳爲南極甲巳丁巳等弧綫距北極各九十度距南極亦然　若巳爲天頂甲辛乙爲地平大圈亦同如甲正北辛正東乙正南丁東北丙東南所在不同而甲乙等高弧距天頂各九十度皆等

大圈上作十字弧綫引長之必過兩極兩極出弧綫至大圈必皆十字正交

如赤道上經圈皆與赤道正交爲十字角則其圈必上

過北極下過南極也然則從兩極出弧綫過赤道必十字正交矣

大圈之極為衆角所輳

如赤道上逐度經圈皆過兩極則極心一點為衆角之宗經圈之弧在赤道上成十字者本皆平行漸遠漸狹至兩極則成角形之鋭尖角無論大小皆輳于極而合成一點離此一點外即成鋭鈍之形而皆與赤道度相應所謂量角以對弧度而角兩旁皆九十度以此

戊
己
庚
赤道
丁
乙
丙

如圖己為北極即衆角之頂鋭其所當赤道之度如乙丙等則己角為鋭角如丙庚等則己角為鈍角　若己為天頂外圈為地平亦然

角度與角旁兩弧之度並用本球之大圈度故量角度者以角為極

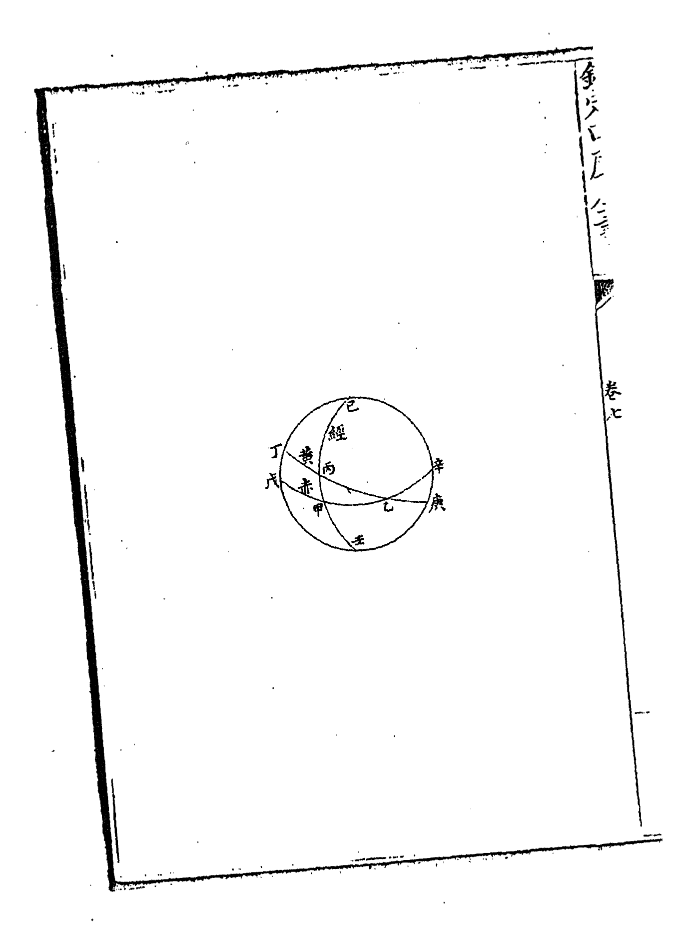
有弧線角不知其度亦不知角旁弧之度法當先求本球之九十度其法以角旁二弧各引長之使復作角乃中分其弧即成本弧之九十度而角旁弧之度可知

以角為心九十度為界作大圈與角旁兩弧並本球大圈而其分度等

乃視角所當之弧即角旁兩九十度弧所界於大圈上得若干度分即角度也故曰以角為極

三大圈相遇則成三角三邊

此所謂弧三角形也如黃道赤道既相交於二分又有赤道經圈截兩道而過之則成乙丙甲弧三角形


己
經
丁
黃
丙
辛
戊
赤
甲
乙
庚
壬

如圖己為北極戊辛為赤道丁庚為黄道二道相交於春分成乙角又己壬為過極經圈自北極己出弧線截黄道於丙得丙乙邊為黄道之一弧赤截赤道於甲成甲乙邊為赤道之一弧而過極經圈為二道所截成丙甲邊為經圈之一弧是為三邊即又成丙角甲角合乙角為三角

弧三角不同於平三角之理

弧三角形有三角三邊共六件以先有之三件求餘三

件與平三角同所不同者平三角形之三角并之皆一百八十度弧三角不然其三角最小者比一百八十度必盈三邊在一度以下可借平三角立算因其差甚微然其角度視半周必有微盈但不得滿五百四十度角之極大者合之以比三半周必不能及平三角之邊小僅咫尺大則千百萬里弧三角邊必在半周以下不得滿一百八十度合三邊不得滿三百六十度如滿全周即成全員而不得成三角

平三角有兩角即知餘角弧三角非算不知

平三角有一正角餘二角必銳弧三角則否有三正角兩正角者

其餘角有鈍有銳或兩銳兩鈍或一銳一鈍不等

平三角有一鈍角餘二角必銳弧三角則否其餘角或銳或正或

鈍甚有三鈍角者

平三角以不同邊而同角為相似形同邊又同角為相等形弧三角則但有相等之形而無相似之形以同角者必同邊也

平三角但可以三邊求角不可以三角求邊弧三角則

可以三角求邊弧三角之邊皆員度也初無丈尺可言故三角可以求邊若平三角邊各有丈尺則必有先得之邊以為之例所以不同 前條言有相等之形無相似之形亦謂其所得之度相等非謂其丈尺等也

弧三角用八綫之理

平三角用八綫惟用於角弧三角用八綫并用於邊平三角以角之八綫與邊相比弧三角是以角之八綫與邊之八綫相比平三角有正角即為句股若正弧三角形實非句股而以其八綫輳成句股

平三角以角求邊是用弧綫求直綫也有角即有弧以邊求角是用直線求弧線也然角以八綫為用仍是以直綫求直綫也句股法也弧三角以邊求角以角求邊並是以弧綫求弧綫也而角與邊並用八綫仍是以直綫求直綫也亦句股法也蓋惟直綫可成句股所不同者平三角所成句股形即在平面而弧三角所成句股不在弧面而在其內外

弧三角之點綫面體

測量家有點綫面體弧三角備有之其所測之角即點也但其點俱在弧面如于渾球任指一星為所測之點即角度從茲起如太陽太陰角度並從其中心一點論之

弧三角之邊即綫也但其綫皆弧綫如渾球上任指兩星即有距綫或于一星出兩弧綫與他星相距即成角而角旁兩綫皆弧綫也

弧三角之形即面也但其面皆渾球上面冪之分形

弧三角之所麗即渾體也剖渾員至心即成錐體而並以弧三角之形為底詳塹堵測量

渾員內點綫面體與弧三角相應

前條點綫面體俱在球面可以目視器測但皆弧綫難相比例比例必用句股句股必直綫故也賴有相應之點綫面惟在渾體內歴員可指雖不可以目視而可以算得弧三角之法所以的確不易也如渾球中剖則成平員即面也于是以球面之各點即弧三角之各角依視法移于平員面即渾員內相應之點也又以弧與角之八綫移至平面成句股以相比例是渾員內相應之綫也又如弧三角

之三邊各引長之成大圈各依大圈以剖渾員即各成平員面是亦渾員內相應之面也二平員面相割成瓜瓣之體三平員面相割成三楞錐體若又依八線横割之即成塹堵諸體是渾員體內相應之分體也此皆與弧面相離在渾員之內非剖渾員即不可見而可以算得即不審目視而器測矣

大圈與渾員同心

球上大圈之心即渾員之心若依各大圈剖渾員成平員面其平員心即渾員之

心

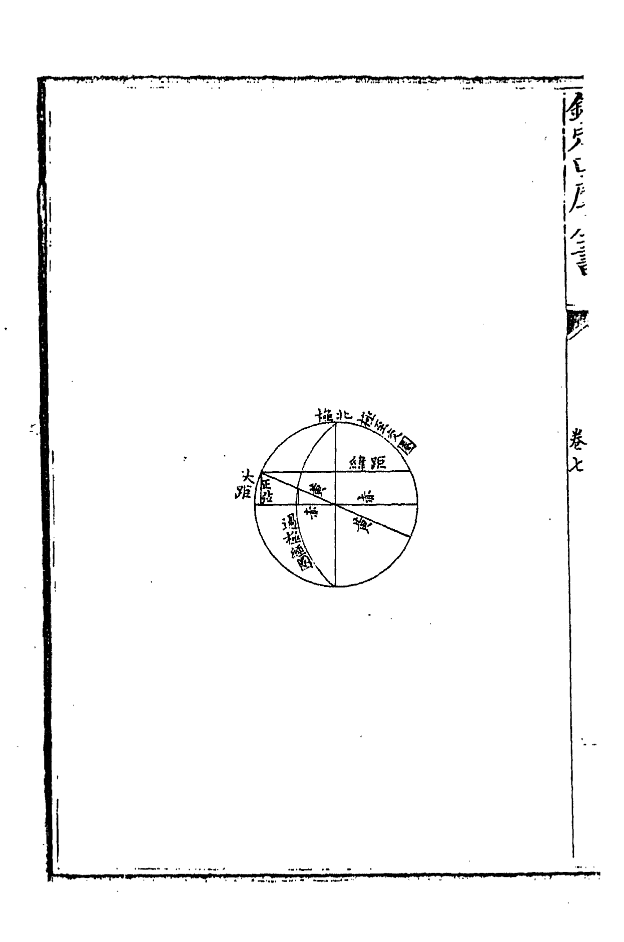
若距等小圈則但以渾員之軸為心而不能以渾員心為心同心者亦同徑大圈以渾貟徑為徑若距等圈則但以通弦為徑渾體内諸綫能與弧三角相應者以此渾員體内諸綫皆宗其徑弧三角既以大圈相割而成必宗大圈徑徑同故内外相應弧三角之邊不用小圈亦以此也距等圈既與大圈異徑則其度不齊不能成邊而所作之角必非真角無從考其度分也

弧三角視法

弧三角非圖不明然圖弧綫於平面必用視法變渾為平

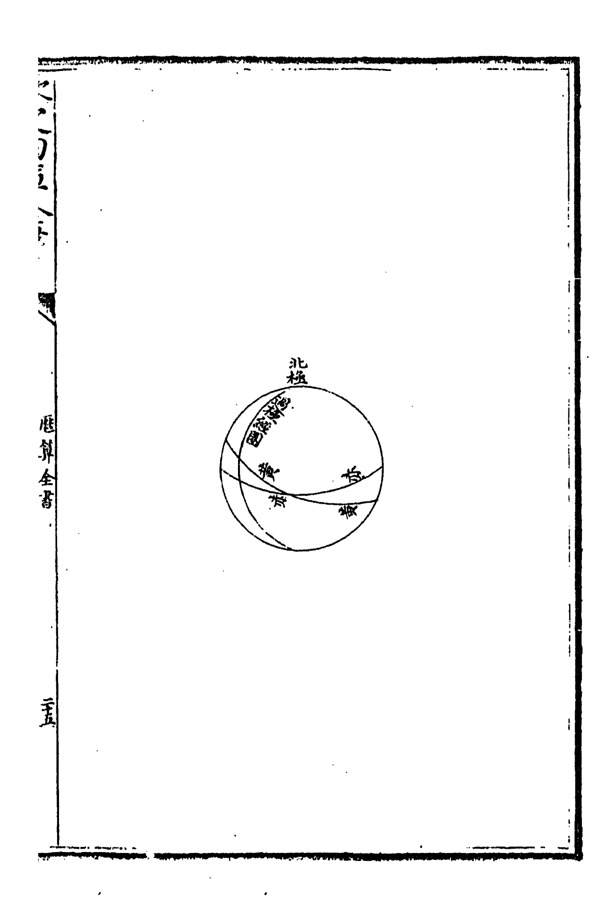
分
赤道
黄道
北極
至

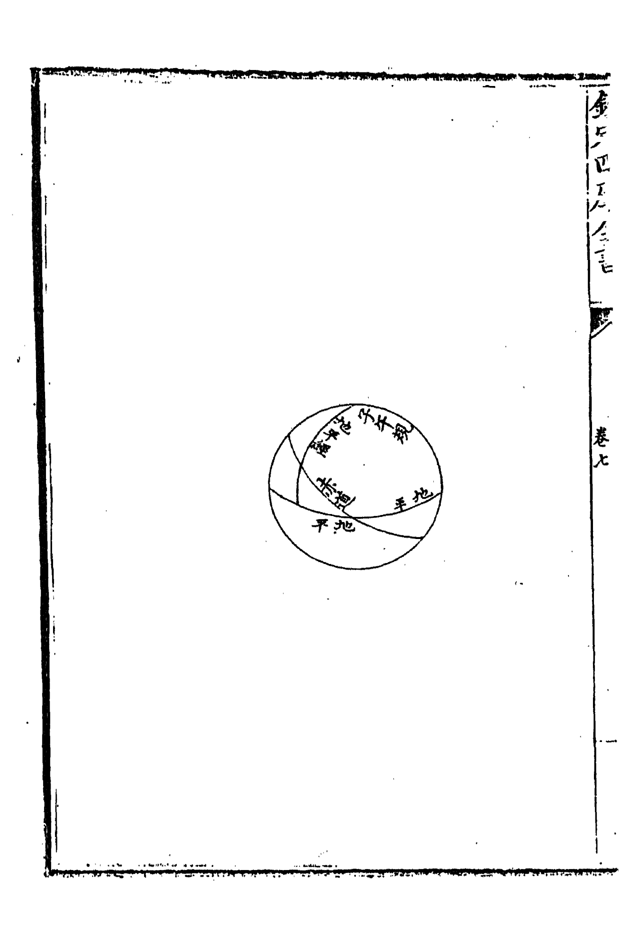
平置渾儀從北極下視則惟赤道為外周不變而黃道斜立即成撱形　其分至各經圈本穹然半員今以正視皆成員徑是變弧綫為直綫也


北極
距緯
大距
正弦
黃
赤
赤
黃
過極經圈

立置渾儀使北極居上而從二分平視之則惟極至交圈為外周不變其赤道黃道俱變直綫為員徑而成輳心之角（即大距度平面角）是變弧綫角為直綫角也（又距等圈亦變橫綫而成各度正弦與員徑平行）其赤道上逐度經圈之過黃赤道者雖變楕形而其正弦不變且歷算可見如在平面而與平面上之大距度正弦同角成大小句股比例是弧面各綫皆可移于平面也故視法不但作圖之用即步算之法已在其中

以上謂之正視以黄赤道為式若于六合儀取天頂地平諸綫亦同他可類推

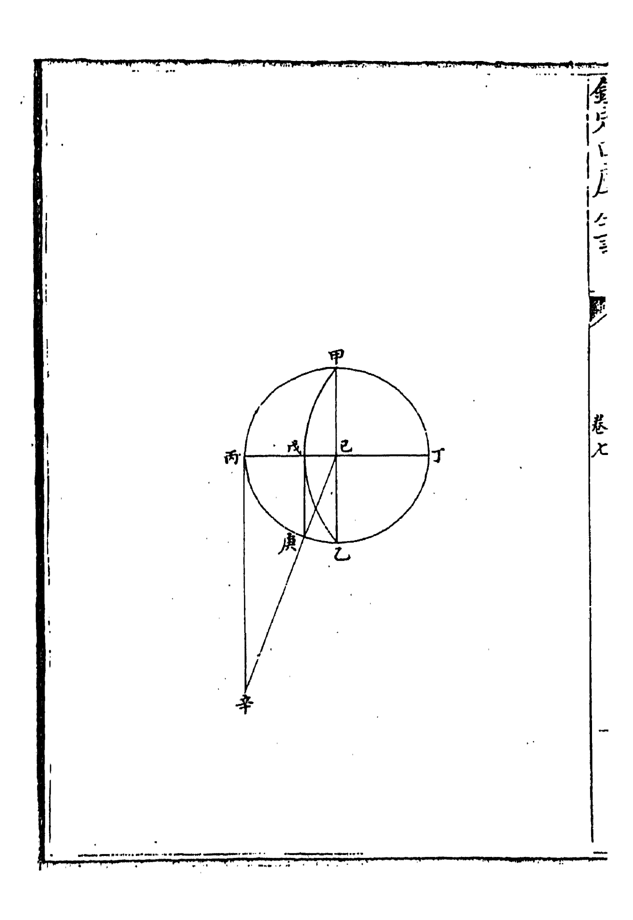

北極
過極經圈
黄
赤
赤
黄


子午規
赤道
地平
地平

以上謂之旁視渾員上有堆疊諸綫從旁側視之庶幾可見雖不能按度肖形而大意不失以顯弧三角之理為用亦多

角之矢

如圖甲丙乙丁半渾員以甲戊乙弧界之則其弧面分兩角為一鋭一鈍以視法移此弧度于相應之平面亦一鋭一鈍即分員徑為大小二矢而戊丙正矢為戊甲丙鋭角之度戊乙丙亦同戊丁大矢為戊甲丁鈍角之度戊乙丁亦同故得矢即得角


甲
丙
戊
己
丁
庚
乙
辛

角之八線

如前圖丙戊弧為甲銳角之度與丙庚等則丙戊之在平面者變為直綫即為甲銳角之矢而戊巳為角之餘弦戊庚為角之正弦丙辛為角之切綫巳辛為角之割綫皆與平面丙庚弧之八綫等

丁巳戊過弧為甲鈍角之度與丁乙庚過弧等則丁戊在平面者變為鈍角之大矢而戊巳餘弦戊庚正弦丙辛切綫巳辛割綫並與銳角同平面鈍角之八綫與外角同用弧三角亦然

正弧斜弧之角與邊分為各類

凡三角內有一正角謂之正弧三角形三角內並無正角謂之斜弧三角形

正弧三角形之角有三正角者有二正角一銳角者有二正角一鈍角者以上種種不須用算又有一正角兩銳角者內分二種一種兩銳角同度一種兩銳角不同度有一正角兩鈍角者內分二種一種兩鈍角同度一種兩鈍角不同度有一正角一銳角一鈍角者內分二種一種銳鈍角角合之成半周一種合銳鈍兩角不能成半周計正弧之角九種而用算者

六也

正弧三角形之邊有三邊並足者（足謂足九十度）有二邊足一邊小者（在象限以下為小）有二邊足一邊大者（過象限以上為大○以上三種可不用算）有三邊並小者（內分二種一種二邊等一種二邊不等）有二邊大而一小者（內分三種一種二大邊等一種二大邊不等一種小邊為一大邊減半周之餘）計正弧之邊八種而用算者五也

二邊俱小則餘邊必不能大故無二小一大之形

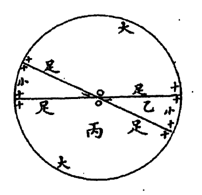
二邊俱大則餘邊亦不能大故無三邊並大之形

一邊若足則餘邊亦有一足故無一邊足之形

正弧三角形圖一

計三種

甲形三角並十字正方
三邊並足九十度



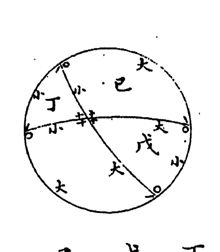
乙形　角二正一銳　邊二足一小

丙形　角二正一鈍　邊二足一大

此置正角在凸面與正角在邊者並同一法

以上三種不須用算

正弧三角形圖二 計三種



丁形 角一正二銳銳同度 三邊並小同者二

戊形 角一正二銳銳同度 邊二大同度一小

己形 角一正一銳一鈍其鈍銳兩角共成一半周 邊二大一小內一大邊與小邊共成一半周

以上正弧形三種有同度之邊與角謂之二等邊形

内有已形雖無同等之邊角而有共為半周之邊角

此置正角在邊與前圖正角在面者並同一法

後庚辛壬形倣此論之

度雖不同而所用之正弦則同即同度也

凡邉等者角亦等後倣此

正弧三角形圖三 計三種

庚形 角一正二鋭三邊並小 並同丁形而無等度

辛形 角一正二鈍邊二大一小 並同戊形而無等度

壬形 角一正一鋭一鈍邊二大一小 並同己形而大小二邊不能成半周角亦然

以上正弧形三種邊角與丁戊己三種無異但無同度之邊凡正弧三角形共九種

斜弧三角形之角有三角並銳者內分三種一種有二角相等一種三角不相等一種三角俱等有二角銳而一鈍者內分四種一種二銳角相等一種二銳角不相等一種鈍角為一銳角減半周之餘一種二銳角相等而又並為鈍角減半周之餘有二角鈍而一銳者內分四種一種二鈍角相等一種二鈍角不相等一種銳角為一鈍角減半周之餘一種二鈍角相等而又並為銳角減半周之餘有三角並鈍者內分三種一種有二角相等一種三角不相等一種三角相等計斜弧之角十有四種

斜弧三角形之邊有一邊足二邊小者內分二種一種二小邊相等一種二小邊不等有一邊足二邊大者內分二種一種二大邊等一種二大邊不等有

一邊足一邊小一邊大者內分二種一種大小二邊合之成半周一種合二邊不能成半周有三邊並小者內分三種一種三邊不等一種二邊等一種三邊俱等有二邊大而一小者內分四種一種二大邊等一種二大邊不等一種小邊為一大邊減半周之餘一種二大邊等而又並為小邊減半周之餘有二邊小而一大者內分四種一種二小邊等一種二小邊不等一種大邊為一小邊減半周之餘一種二小邊等而又並為大邊減半周之餘有三邊並大者內分三種一種三邊不等一種二邊等一種三邊俱等計斜弧之邊二十種

斜弧三角形圖一 計四種

乾形

三角並鈍又皆同度

三度並大又皆同度

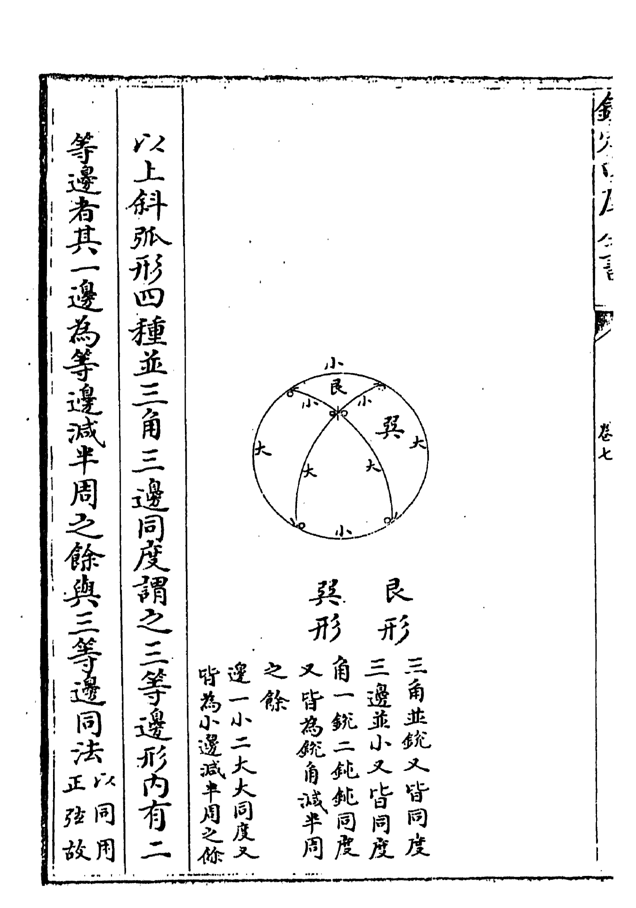
坤形

角一鈍二銳同度

其鈍角為銳角減半周之餘

邊一大二小小同度

其大邊為小邊減半周之餘



艮形

三角並鋭又皆同度
三邊並小又皆同度

巽形

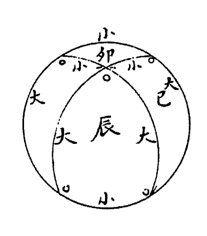
角一鋭二鈍鈍同度又皆為鋭角減半周之餘
邊一小二大大同度又皆為小邊減半周之餘

以上斜弧形四種並三角三邊同度謂之三等邊形內有二等邊者其一邊為等邊減半周之餘與三等邊同法以同用正弦故

斜弧三角形圖二 計十二種

子形 丑形 寅形

二銳角同度一鈍
二小邊同度一足
三鈍角內同度者二
二大邊同度一足
二銳角一鈍內一銳角
為鈍角減半周之餘
邊一足一大一小小邊
為大邊減半周之餘

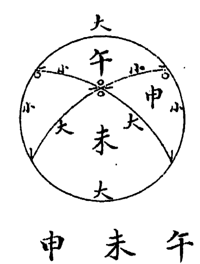


卯形　二鋭角同度一鈍三邊並小同者二

辰形　三角並鈍内同度者二二大邊同度一小

巳形　二鋭角一鈍内一鋭角為鈍角減半周之餘

二大邊一小内一大邊為小邊減半周之餘



午形　二鈍角同度一鈍
二小邊同度一大

未形　三角並鈍同度者二
三邊並大同度者二

申形　二鈍角一鈍內一鈍角
為鈍角減半周之餘
二小邊一大內一小邊
為大邊減半周之餘

酉形　三角並鈍同度者二　三邊並小同度者二

戌形　二鈍角同度一鈍　二大邊同度一小

亥形　二鈍角一鈍內一鈍角為鈍角減半周之餘　二大邊一小內一大邊為小邊減半周之餘

以上斜弧三角形十二種並二等邊形內有四種以大小二邊度戌半周與二等邊同法小邊為大邊減半周之餘則同用一正弦

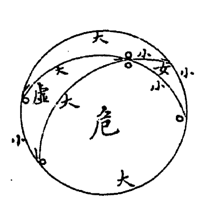
斜弧三角形圖三計十種曆書只九種遺一銳二鈍形

斗形

三角並銳三邊並小

牛形

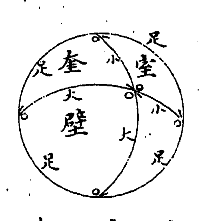
角一銳二鈍邊二大一小



女形　三邊並小　角一鈍二鋭

虛形　邊二大一小　角一鈍二鋭

危形　邊二大一小　三角並鈍



室形　角一鈍二銳　邊一足二小

壁形　三角並鈍　邊一足二大

奎形　角一鈍二銳　邊一大一足一小

天
小 小
小 婁 小
大 胃 大
大

婁形 角一鈍二銳 邊一大二小

胃形 三角並銳 三邊並大

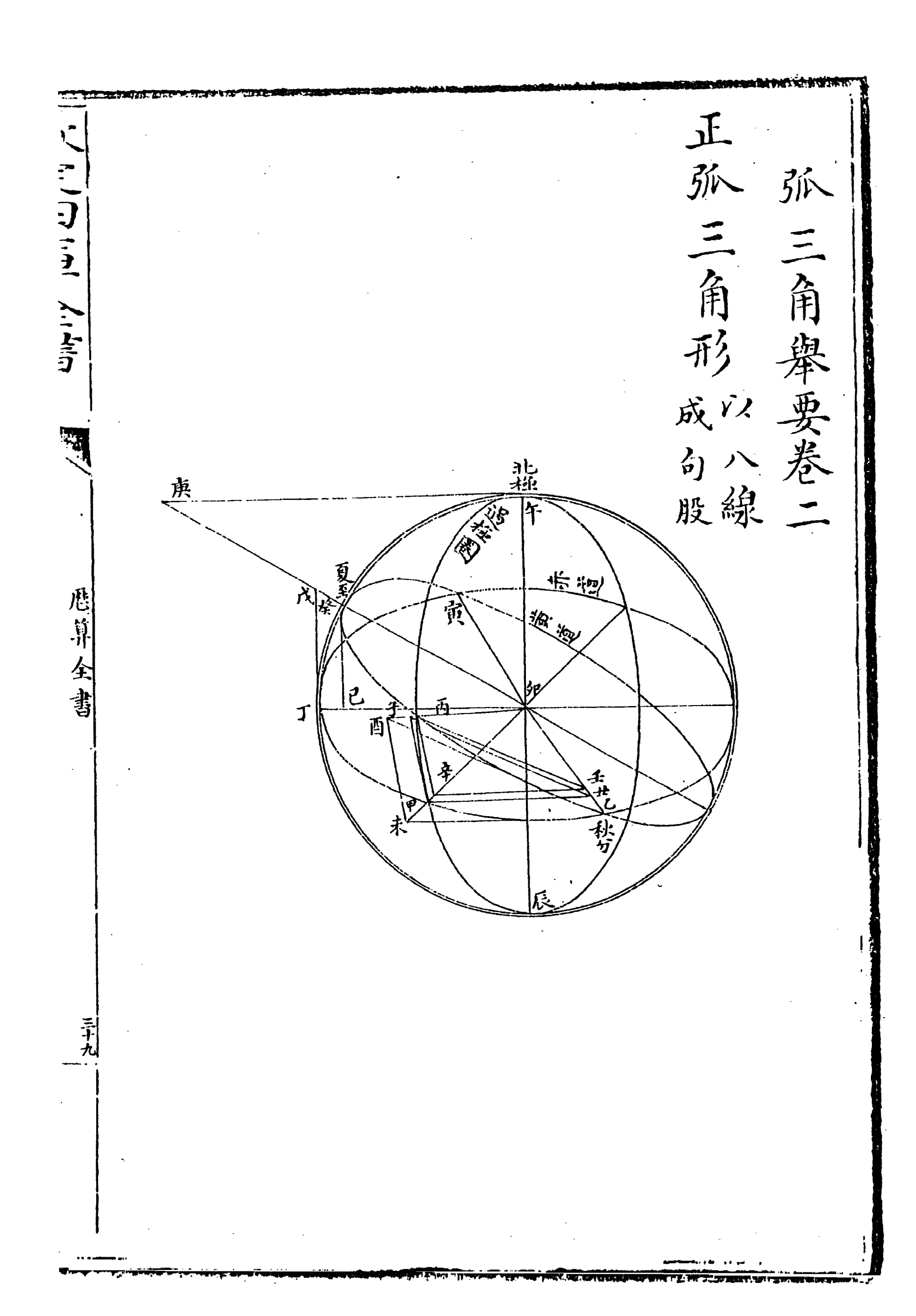
以上斜弧三角形十種並三邊不等 用算只四種

凡斜弧三角形共二十六種

通共弧三角形三十五種 內除正弧三種不須用算實三十二種

弧三角舉要卷二

正弧三角形以八線成句股



乙丁寅為赤道乙丙癸為黃道乙與寅為春秋分癸為夏至午癸丁辰為極至交圈午與辰為南北極午丙甲為過極經圈

丙乙為黃道距二分之度甲乙為赤道距二分之度卯同升度丙甲為黃赤距緯成丙乙甲三角弧形甲為正角乙春秋分角與渾員心卯角相應

癸丁弧為黃赤大距即乙角之弧亦為卯角之弧癸己為乙角正弦卯己其餘弦戊丁為乙角切線戊卯其割線卯癸及卯

丁皆半徑成癸己夘及戊丁夘兩句股形

又午夘半徑庚午為乙角餘切庚夘為乙角餘割成午夘庚倒句股形

丙辛為丙甲距度正弦丙壬為丙乙黄道正弦作辛壬線與丁夘平行成丙辛壬句股形

子甲為丙甲距度切線甲丑為甲乙赤道正弦作子丑線與丙壬平行成子甲丑句股形

酉乙為丙乙黄道切線未乙為甲乙赤道切線作酉未

線與子甲平行成酉未乙句股形

前二句股形在癸丁大距弧内外（癸巳卯用正餘弦在弧内戊丁卯用割切線出弧外）後三句股形在丙乙甲三角内外（丙辛壬在丙角用兩正弦在渾員内子甲丑在甲角兼用正弦切線半在内半在外酉未乙用兩切線在渾員外）

論曰此五句股形皆相似故其比例等何也赤道平安從乙視之則丁乙象限與丁卯半徑視之成一線而辛壬聯線甲丑正弦未乙切線皆在此線之上矣以其線皆平安皆在赤道平面與赤道半徑平行故也（是爲句線）

赤道平安則黄道之斜倚亦平其癸乙象限與癸夘半
徑從乙視之亦成一線而丙壬正弦子丑聯線酉乙切
線皆在此線之上矣以其線皆斜倚皆在黄道平面與
黄道半徑平行故也是為弦線
黄赤道相交成乙角而赤道既平安則從乙窺夘夘乙
半徑竟成一點而乙丑壬夘角合成一角矣
諸句股形既同角而其句線皆同赤道之平安其弦線
皆同黄道之斜倚則其股線皆與赤道半徑為十字正

角而平行矣是故形相似而比例皆等也其卯午庚倒句股形為相當之用與諸句股形亦相似而比例等

又論曰丙辛壬形兩正弦丙辛丙壬俱在渾體之内其理易明子甲丑形甲丑正弦在渾體内子甲切線在渾體之外已足詑矣酉未乙形兩切線酉乙未乙俱在渾體之外雖習其術者未免自疑歷書置而不言盖以此耶今為補說詳明欲令學者了然心目庶以用之不疑

用法

假如有丙乙黄道距春分之度求其距緯丙甲法為半徑癸卯與乙角之正弦癸己若丙乙黄道之正弦丙壬與丙甲距緯之正弦丙辛也

一　半徑全數　癸卯　弦

二　乙角正弦　癸己　股

三　黄道正弦　丙壬　弦

四　距緯正弦　丙辛　股

若先有丙甲距度而求丙乙黄道距二分之度則反用

之為乙角之正弦癸巳與半徑癸卯若欲用半徑為一率以省除則為半徑午卯與乙角之餘割庚卯其比例亦同若丙甲距緯之正弦丙辛與丙乙黄道之正弦丙壬也

一	乙角正弦	癸巳	半徑全數	午卯	股
二	半徑全數	癸卯	乙角餘割	庚卯	弦
三	距緯正弦	丙辛			股
四	黄道正弦	丙壬			弦

右丙辛壬形用法

假如有甲乙赤道同升度求距緯丙甲法為半徑卯丁與乙角之切線丁戊若甲乙赤道之正弦甲丑與丙甲距緯之切線子甲也

一　半徑全數　卯丁　句

二　乙角正切　丁戊　股

三　赤道正弦　甲丑　句

四　距緯正切　子甲　股

若先有丙甲距緯而求甲乙赤道則反用之為乙角之

切線戊丁與半徑丁卯（或用半徑為一率則為半徑卯午與乙角之餘切午庚）若丙甲距緯之切線子甲與甲乙赤道之正弦甲丑也

一	乙角正切	戊丁	半徑全數	卯午	股
二	半徑全數	丁卯	乙角餘切	午庚	句
三	距緯正切	子甲			股
四	赤道正弦	甲丑			句

右子甲丑形用法

論曰以上四法歷書所有但于圖增一卯午庚句股形

則互視之理更明

假如有丙乙黃道距二分之度徑求甲乙赤道同升度法為半徑卯癸與乙角之餘弦卯巳若丙乙黃道之切線酉乙與甲乙赤道之切線末乙也

一	半徑全數	卯癸	弦
二	乙角餘弦	卯巳	句
三	黃道正切	酉乙	弦
四	赤道正切	末乙	句

若先有甲乙赤道而求其所當黄道丙乙法為半徑丁卯與乙角之割線戊卯若甲乙赤道之切線未乙與丙乙黄道之切線酉乙也

一 半徑全數	丁卯	句
二 乙角正割	戊卯	弦
三 赤道正切	未乙	句
四 黄道正切	酉乙	弦

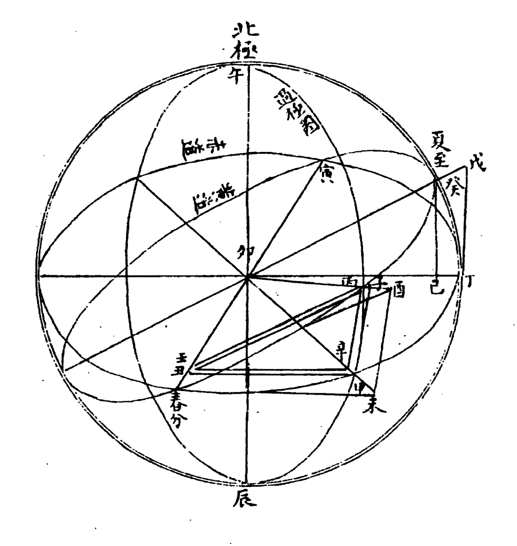
論曰以上兩條酉未乙形用法予所補也有此二法黄

赤道可以自相求而正角弧形之用始備矣外此仍有三弧割線餘弦之用具如别紙

十餘年前曾作弧三角所成句股書一册稿存兒輩行笈中覔之不可得也庚辰年乃復作此至辛巳夏復得舊稿為之憫然然其理固先後一揆而說有詳略可以互明不妨並存以徵子學之進退因思古人畢生平之力而成一事良自不易世有子雲或不以覆瓿置之乎康熙辛巳七夕前兩日勿菴梅文鼎識

是日也爲立秋之辰好雨生涼炎歊頓失稍簡殘帙殊散人懷

附舊稿



甲乙丙正弧三角形即測量全義第七卷原圖稍為酌定又增一酉未乙形

又圖

北極
午
寅
夏至
戊
卯
丁
己
丙
子
酉
壬
丑
乙
辛
申
未
春分
辰

測員之用甚博非止黄赤也然黄道赤道南北極二分二至諸名皆人所習聞故仍借用其號以便識别

案圖中句股形凡五皆形相似

其一癸巳卯形

以癸卯半徑為弦（即黄道半徑）癸巳正弦為股（即黄赤大距弧之正弦）巳卯餘弦為句（即黄赤大距弧之餘弦）

其二戊丁卯形

以戊卯割線為弦（即黄赤大距弧之正割線）戊丁切線為股（即黄赤大距弧

之正切線丁卯半徑為句即赤道半徑

以上二句股形生於黃赤道之大距度乃總法也兩句股形一在渾體之內一出其外同用卯角即黃道心亦即春分角

其三丙辛壬形

以丙壬正弦為弦即黃經乙丙弧之正弦以丙卯黃道半徑為其全數而卯壬其餘弦丙辛正弦為股即黃赤距緯丙甲弧之正弦亦以丙卯黃道半徑為其全數而辛卯其餘弦辛壬橫線為句

法於赤道平面上作横線聯兩餘弦成夘壬辛平句股形此形以距緯餘弦夘辛為弦黄經餘弦夘壬為股而辛壬其句也此辛壬線既為兩餘弦平句股形之句亦即能為兩正弦立句股形之句矣歴書以辛壬為丙辛之餘弦誤也然則當命為何線曰此非八線中所有乃立三角體之楞線也

其四子甲丑形

以子丑斜線為弦此亦立三角體之楞線也非八線中之線子甲切線為股

即黃赤距緯弧之正切線以赤道半徑甲卯為其全數而子卯其割線也甲丑正弦為句即赤經乙甲弧之正弦亦以赤道半徑甲卯為其全數而丑卯其餘弦也

其五酉未乙形

以酉乙切線為弦即黃經丙乙弧之正切線以黃赤半徑卯乙為其全數而酉卯其割線也酉未立線為股此亦立三角之楞線非八線中之線未乙切線為句即赤經乙甲弧之正切線亦以黃赤半徑卯乙為其全數而未卯其割線也

以上三句股形生於設弧之度第三形在渾體之內

第四形半在渾體之內而出其外第五形全在渾體

之外

問既在體外其狀何如曰設渾圓在立方之内而以兩極居立方底葢之心以乙春分居立方立面之心則黄赤兩經之切線酉乙未乙皆在方體之立面而未乙必為句酉乙必為弦于是作立線聯之即成酉未乙句股形矣此一形歷書遺之予所補也詳塹堵測量

論曰此五句股形皆同角故其比例等然與弧三角真

同者乙角也

第一癸巳卯形第二戊丁卯形兩形皆乙角原有之八線即春秋分角也其度則兩至之大距也

或先有角以求邊則以此兩形中線例他形中線得線則得邊矣

或先有邊以求角則以他形中線例此兩形中線得線則亦得角矣蓋卯角即乙角也○若欲求丙角則以丙角當乙角如法求之

第三形丙辛壬形以黄經之正弦丙壬黄赤距度之正弦丙辛為

弦與股是以黃經與距緯相求

或先有乙角有黃經以求距緯用乙角實用壬角下同

或先有乙角有距緯以求黃經

或先有黃經距緯可求乙角亦可求丙角

第四形子甲丑形以黃赤距緯之切線子甲赤經之正弦甲丑為股與句是以距緯與赤經相求

或先有乙角有赤經以求距緯用乙角實用丑角下同

或先有乙角有距緯以求赤經

或先有赤經距緯可求乙角亦可丙角

第五形酉未乙形以赤經之正切未乙黄經之正切酉乙為句與弦是黄赤經度相求

或先有乙角有黄經以求赤道同升度

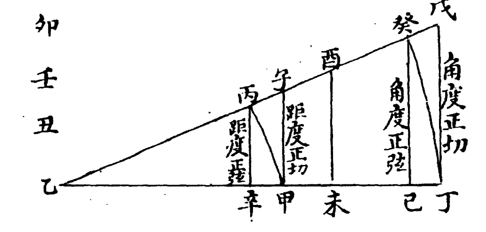
或先有乙角有赤道同升以求黄經

或先有黄赤二經度可求乙角亦可求丙角

又論曰諸句股形所用之卯壬丑乙四角實皆乙角何也側望則弧度皆變正弦而體心卯作直線至乙為卯

壬丑乙線即半徑也今以側望之故此半徑直線化為一點則乙角即夘角亦即壬角亦即丑角矣

側望之形



癸丁為乙角之度即黄赤大距二至緯度癸乙為黄道半徑丁乙為赤道半徑戊丁為乙角切線癸巳為乙角正弦戊乙為乙角割線巳乙為乙角餘弦癸巳乙戊丁乙皆句股形其乙角即夘角

丙甲為設弧距度其正弦丙辛其切線夘甲

丙乙為所設黄道度其正弦丙壬因側望弧度正弦成一線偕距度正弦丙辛成句股形其乙角即壬角

甲乙為所設赤道同升度其正弦甲丑因側望弧度正弦成一線偕

距度切線子甲戌句股形其乙角即丑角

酉乙為所設黃經切線末乙為赤道同升度切線此兩

線成一酉未乙句股形在體外真用乙角

正弧三角形求餘角法

凡弧三角有三邊三角先得三件可知餘件與平三角

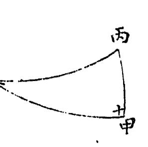
同理前論正弧形以黃赤道為例而但詳乙角者因春

分角有一定之度人所易知故先詳之或疑求乙角之

法不可施於丙角茲復為之條析如左

仍以黃道上過極經圈之交角

為例



丙乙為黃道度　甲乙為赤道同升度　丙甲為黃赤距度　丙角為黃道上交角　乙為春分角　甲常為正角

假如有乙丙黃道度有乙甲赤道同升度而求丙交角則為乙丙之正弦與乙甲之正弦若半徑與丙角之正弦也

一	乙丙正弦	半徑	弦
二	乙甲正弦		股
三	半徑	乙丙餘割	弦
四	丙角正弦		股

假如有丙甲距度及乙甲同升度而求丙交角則為丙甲之正弦與乙甲之切線若半徑與丙角之切線

丙
距度
乙
同升
甲

一	丙甲正弦	半徑	句
二	乙甲切線		股
三	半徑	丙甲餘割	句
四	丙角切線		股

假如有丙甲距度及乙丙黄道度而求丙交角則為乙丙之切線與丙甲之切線若半徑與丙角之餘弦

丙
距度
甲
乙
黄道

一	乙丙切線	半徑	弦
二	丙甲切線		句
三	半徑	乙丙餘切	弦
四	丙角餘弦		句

又如有丙交角有乙丙交道度而求乙甲同升度則為半徑與丙角之正弦若乙丙之正弦與乙甲之正弦

一	半徑	弦
二	丙角正弦	股
三	乙丙正弦	弦
四	乙甲正弦	股

或先有乙甲同升度而求乙丙黄道度則以前率更之為丙角之正弦與半徑若乙甲之正弦與乙丙之正弦

一　丙角正弦　股
二　半徑　弦
三　乙甲正弦　股
四　乙丙正弦　弦

又如有丙交角有乙甲同升度而求丙甲距度則為丙角之切線與半徑若乙甲之切線與丙甲之正弦

一　丙角切線　股

二　半徑　句

三　乙甲切線　股

四　丙甲正弦　句

或先有丙甲距度而求乙甲同升度則以前率更之爲半徑與丙角切線若丙甲正弦與乙甲切線

一　半徑　句

二　丙角切線　股

三　丙甲正弦　句

四　乙甲切線　股

又如有丙交角有乙丙黄道度求丙甲距度則為半徑與丙角餘弦若乙丙切線與丙甲切線

一　半徑　弦
二　丙角餘弦　句
三　乙丙切線　弦
四　丙甲切線　句

或先有丙甲距度而求乙丙黄道則以前率更之為丙角餘弦與半徑若丙甲切線與乙丙切線

一　丙角餘弦　句

二　半徑　弦

三　丙甲切線　句

四　乙丙切線　弦

論曰求丙角之法一一皆同乙角更之而用丙角求餘邊亦如其用乙角也所異者乙角定為春分角則其度不變丙角為過極經圈交黃道之角隨度而移（交角近大距則甚大類十字角近春分只六十六度半弱中間交角度度不同他形亦然皆逐度變丙角）有時大於乙角有時小於乙角（乙角不及半象限則丙角大乙角過半象限則丙角有時小）故必求而得之

又論曰丙交角既隨度移而甲角常為正角何也凡球上大圈相交成十字者必過其極今過極經圈乃赤道之經線惟二至時則此圈能過黃赤兩極其餘則但過

赤道極而不能過黃道極故其交黃道也常為斜角（即丙角）交赤道則常為正角（即甲角）

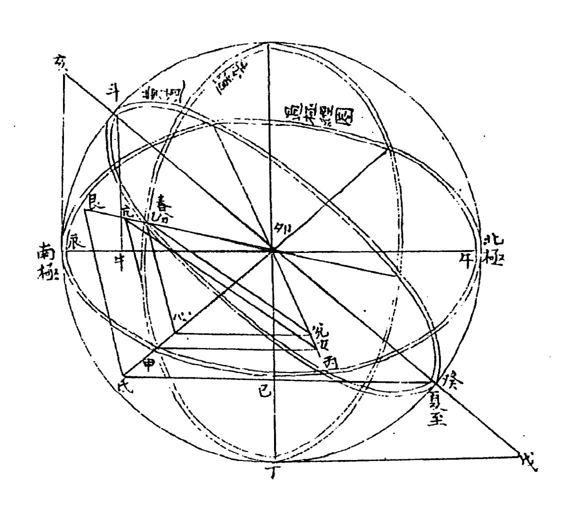
又論曰丙角與乙角共此三邊（一乙丙黃道一丙甲赤道一丙甲距度）其所用比例者亦共此三邊之八線（三邊各有正弦亦各有切線）而所成句股形遂分兩種可互觀也

乙角所成諸句股皆以戊丁卯為例

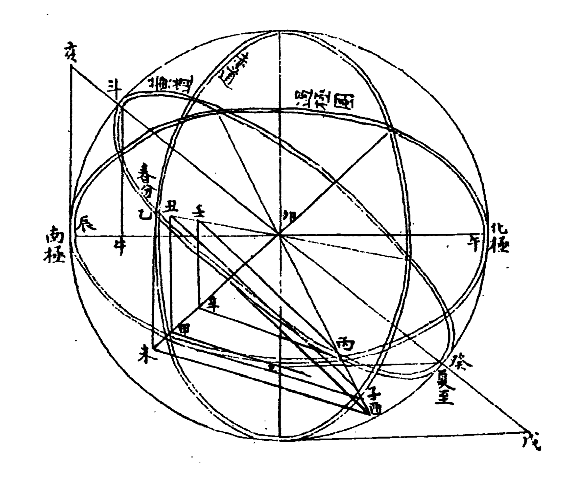
丙角所成諸句股皆以亥辰卯為例

並如後圖

丙角所成句股



乙角所成句股



如圖丙角第一層句股系乙心形即乙角之壬丙辛也在乙角兩正弦交于丙在丙角兩正弦交于乙皆弦與股之比例而同弦不同股乙角丙角並以乙丙黃道正弦為弦而乙角所用之股為丙甲正弦丙角所用則乙甲正弦皆正弦也而弦同股別

丙角第二層句股女甲亢形即乙角之子甲丑也乙角丙角並以一正弦一切線交于甲為句與股之比例而所用相反乙角于乙甲用正弦于丙甲用切線丙角則于乙甲用切線于丙甲用正弦皆乙甲丙甲兩弧之正弦切線而所用迥別

丙角第三層句股艮丙氐形即乙角之酉乙未也在乙角以兩切線聯于乙在丙角以兩切線交于丙皆弦與句之比例而同弦不同句乙丙兩角並以乙丙切線為弦而乙角以乙甲切線為句丙角以丙甲切線為句皆切線也而弦同句别

球面弧三角形弧角同比例解

第一題

正弧三角形以一角對一邊則各角正弦與對邊之正弦皆為同理之比例

丙
乙
甲

如圖乙甲丙弧三角形甲為正角法為半徑與乙角之正弦若乙丙之正弦與丙甲之正弦更之則乙角之正弦與對邊丙甲之正弦若半徑與乙丙之正弦也又丙角之正弦與其對邊乙甲之正弦亦若半徑與乙丙之正弦也合之則乙角之正弦與其對邊丙甲之正弦亦若丙角之正弦與其對邊乙甲之正弦

論曰乙丙兩角與其對邊之正弦既並以半徑與乙丙為比例則其比例亦自相等而兩角與兩對邊其正弦

皆為同比例

又論曰甲為正角其度九十而乙丙者甲正角所對之邊也半徑者即九十度之正弦也以半徑比乙丙之正弦即是以甲角之正弦比對邊之正弦故以三角對三邊皆為同比例

第二題

凡四率比例二宗內有二率三率之數相同則兩理之首末二率為互視之同比例即斜弧比例之所以然故先論之

假如有甲乙丙丁四率甲四與乙八若丙六與丁十二皆加倍之比例也

又有戊乙丙辛四率戊二與乙八若丙六與辛二十四皆四倍之比例也

此兩比例原不同理特以兩理之第二第三同為乙八丙六故兩理之第一第四能互用為同理之比例先理之第一甲四與次理之第四辛二十四若次理之第一戊二與先理之第四丁十二皆六倍之比例也

一	二	三	四	一	二	三	四
甲 四	乙 八	丙 六	丁 二十	甲 四	辛 二十四	戊 二	丁 二十
戊 二	乙 八	丙 六	辛 二十四				

論曰凡二率三率相乘為實首率為法得四率今兩理所用之實皆乙八丙六相乘四十八之實惟甲四為法則得十二若戊二為法則得二十四矣法大者得數小法小者得數大而所用之實本同故互用之即為同理之比例也

試以先理之四率更為首率其理亦同丁與辛若戊與甲皆加倍比例

若反之令兩四率並為首率亦同甲與戊若辛與丁皆折半比例並如後圖

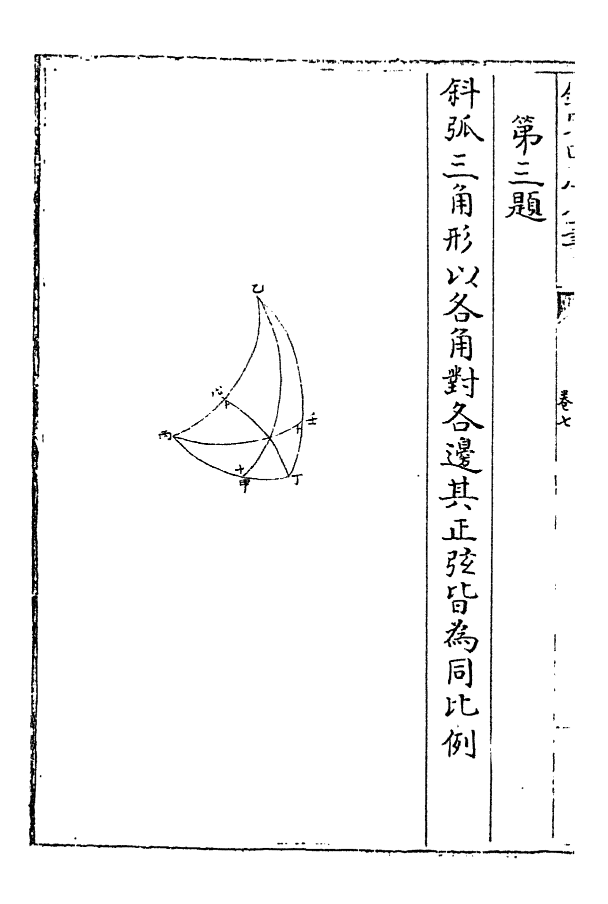
一 丁 二十
二 乙 八
三 丙 六
四 甲 四

戊 二
乙 八
丙 六
辛 二十四

一 丁 二十
二 辛 二十四
三 戊 二
四 甲 四

第三題

斜弧三角形以各角對各邊其正弦皆為同比例



乙丙丁斜弧三角形任從乙角作乙甲垂弧至對邊分元形為兩正角形甲為正角

依前正角形論各對邊之正弦與所對角之正弦比例皆等

乙甲丁形丁角正弦與乙角正弦若半徑（即甲角）與丁乙正弦

乙正弦是一理也

乙甲丙形丙角正弦與乙甲正弦若半徑與乙丙正弦是又一理也

兩理之第二同為乙甲第三同為半徑則兩理之首末二率為互視之同比例故丁角之正弦與乙丙之正弦若丙角之正弦與丁乙之正弦也

又如法從丁角作丁戊垂弧至對邊分兩形而戊為正角則乙角正弦與丁丙正弦亦若丙角正弦與乙丁正弦　又從丙作垂弧分兩形而壬為正角則乙角與丁丙亦若丁角與乙丙

一　丁角正弦　　丙角正弦

二　乙甲正弦　　乙甲正弦

三　甲正角半徑　　甲正角半徑

四　乙丁正弦　　乙丙正弦

一　丁角正弦

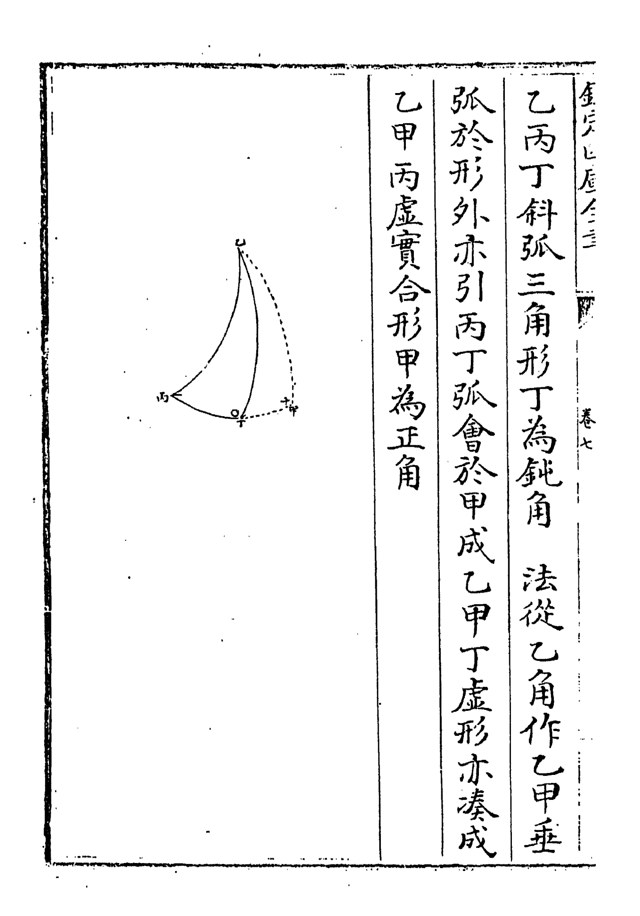
二　乙丙正弦

三　丙角正弦

四　乙丁正弦

若垂弧在形外其理亦同

乙丙丁斜弧三角形丁為鈍角　法從乙角作乙甲垂弧於形外亦引丙丁弧會於甲成乙甲丁虛形亦湊成乙甲丙虛實合形甲為正角



乙甲丁形丁角之正弦與乙甲邊若半徑與乙丁邊正弦一理也　乙甲丙形丙角之正弦與乙甲邊若半徑與乙丙正弦又一理也　准前論兩理之第二第三既同則丁角正弦與乙丙正弦若丙角正弦與乙丁正弦也

論曰丁角在虛形是本形之外角也何以用為内角曰凡鈍角之正弦與外角之正弦同數故用外角如本形角也

若用乙角與丁丙邊則作丙庚弧於形外取庚正角其
理同上或作丁戊垂弧於形內取戊正角分兩形則如
前法並同

用法

凡弧三角形（不論正角斜角）但有一角及其對角之一弧則其餘有一角者可以知對角之弧而有一弧者亦可以知對弧之角皆以其正弦用三率比例求之

假如乙丁丙三角形先有丁角及相對之乙丙弧則其餘但有丙角可以知乙丁弧有乙角可以知丁丙弧此為角求弧也若有乙丁弧亦可求丙角有丁丙弧亦可求乙角此為弧求角也

一	丁角正弦		
一	乙丙正弦		
二	乙丙正弦		
二	丁角正弦		
三	丙角正弦	乙角正弦	
三	乙丁正弦	丁丙正弦	
四	乙丁正弦	丁丙正弦	
四	丙角正弦	乙角正弦	

曆算全書卷七